Δίνεται συνάρτηση τύπου:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \ x\le 1 \\ (x-2)^2 & , \ x>1 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα παρακάτω:

$\inf\{f(x): x\in[-2,3)\}$ και $\sup\{f(x): x\in[-2,3)\}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \ x<1 \\ 2(x-2) & , \ x>1 \end{cases}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=3$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-2)^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-3)=-2$$

Άρα, δεν ορίζεται παράγωγος στο $x_0=1$

Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία:

- εκεί όπου η παράγωγος δεν ορίζεται ($\nexists f'(x_0)$) $\Leftarrow x_0=1$
- " " " " μηδενίζεται ($f'(x_0)=0$) $\Leftarrow x_0=0,2$

	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
f'	+	0	+		−	0	+	
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	τ.μεγ	$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει τοπ. μεγ. στο $x_0=2$ με τιμή το $f(2)=0$.
Επίσης, $f(-2)=-8$ και $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=1$

Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\min\{f(2), f(-2), \lim_{x\to 3^-}f(x)\}=-8=\inf\{f(x): x\in[-2,3)\}$$

$$\max\{f(2), f(-2), \lim_{x\to 3^-}f(x)\}=1=\sup\{f(x): x\in[-2,3)\}.$$